# CAPÍTULO 4

# LIMITE E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES REAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS

## 4.1 Um Pouco de Topologia

Vamos agora nos preparar para definir limite de funções reais de várias variáveis reais. Para isto, precisamos de alguns conceitos importantes. Em primeiro lugar, vamos recordar que, dados dois vetores $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ em $\mathbb{R}^n$, a distância entre $\vec{v}$ e $\vec{u}$ é dada por

$$||\vec{v} - \vec{u}|| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + ... + (v_n - u_n)^2},$$

onde a função $||\,.\,|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é chamada de *norma*. Observe ainda que,

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2} = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}}.$$

Desta forma, uma *bola aberta em* $\mathbb{R}^n$ *de raio* $r$ *com centro em* $X_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$, que denotaremos por $B_r(X_0)$, é definida por

$$B_r(X_0) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2 < r^2\}$$

e, uma *bola fechada em* $\mathbb{R}^n$ *de raio* $r$ *com centro em* $X_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$, que denotaremos por $\overline{B_r(X_0)}$, é definida por

$$\overline{B_r(X_0)} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2 \leq r^2\}.$$

Na reta ($\mathbb{R}$), temos que uma bola aberta de raio $r$ com centro em $x_0$ é o conjunto dos pontos no intervalo aberto $(x_0 - r, x_0 + r)$ ($(x - x_0)^2 < r^2 \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2} < r \Leftrightarrow |x - x_0| < r$) e que uma bola fechada de raio $r$ com centro em $x_0$ é o conjunto dos pontos no intervalo fechado $[x_0 - r, x_0 + r]$ ($(x - x_0)^2 \leq r^2 \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2} \leq r \Leftrightarrow |x - x_0| \leq r$). No plano ($\mathbb{R}^2$), temos que uma bola aberta de raio $r$ com centro em $(x_0, y_0)$ é o conjunto dos pontos que estão no interior da circunferência de raio $r$ com centro em $(x_0, y_0)$, cuja equação é $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ e que uma bola fechada de raio $r$ com centro em $(x_0, y_0)$ é o conjunto dos pontos que estão no interior da circunferência de raio $r$ com centro em $(x_0, y_0)$, cuja equação é $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, incluindo os pontos da própria circunferência $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. E, no espaço ($\mathbb{R}^3$), temos que uma bola aberta de raio $r$ com centro em $(x_0, y_0, z_0)$ é o conjunto dos pontos que estão no interior da esfera de raio $r$ com centro em $(x_0, y_0, z_0)$, cuja equação é $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ e que uma bola fechada de raio $r$ com centro em $(x_0, y_0, z_0)$ é o conjunto dos pontos que estão no interior da esfera de raio $r$ com centro em $(x_0, y_0, z_0)$, cuja equação é $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$, incluindo os pontos da própria esfera $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

Vamos definir agora *pontos interiores*, *conjuntos abertos*, *vizinhança*, *pontos de acumulação*, *pontos de fronteira* e *conjuntos fechados*.

**DEFINIÇÃO 4.1.1: (Ponto Interior)** Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio, dizemos que $X_0 \in A$ é um *ponto interior* de $A$ se existe uma bola aberta com centro em $X_0$ inteiramente contida em $A$.

**DEFINIÇÃO 4.1.2: (Conjunto Aberto)** Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio, dizemos que $A$ é um *conjunto aberto* se todos os seus pontos são pontos interiores.

**Exemplo 4.1.1:** Toda bola aberta $B_r(X_0) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, (x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2 < r^2\}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. Em particular, a bola aberta $B_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$, a bola aberta $B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$ e a bola aberta $B_r(x_0, y_0, z_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x - x_0)^2 + (y - y_0) =^2 +(z - z_0)^2 < r^2\}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^3$.

**Exemplo 4.1.2:** O conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1\}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$.

**DEFINIÇÃO 4.1.3: (Vizinhança)** Uma vizinhança de um ponto $X_0 \in \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto que contém $X_0$.

**Exemplo 4.1.3:** Toda bola aberta $B_r(X_0) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, (x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2 < r^2\}$ é uma vizinhança de $X_0$.

**DEFINIÇÃO 4.1.4: (Ponto de Acumulação)** Dizemos que $X_0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se toda bola aberta com centro em $X_0$ contém pelo menos um ponto $X \in A$, $X \neq X_0$.

Observe que um ponto de acumulação de um dado conjunto não necessariamente pertence ao conjunto.

**Exemplo 4.1.4:** O conjunto dos pontos de acumulação da bola aberta $B_1(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x,y) \in x^2+y^2 < 1\}$ é a bola fechada $\overline{B_1(0,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x,y) \in x^2+y^2 \leq 1\}$.

**Exemplo 4.1.5:** O conjunto dos pontos de acumulação da bola fechada $\overline{B_1(0,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x,y) \in x^2+y^2 \leq 1\}$ é a própria bola fechada $\overline{B_1(0,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x,y) \in x^2+y^2 \leq 1\}$.

**Exemplo 4.1.6:** O conjunto dos pontos de acumulação do conjunto $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ é todo o $\mathbb{R}^2$.

**Exemplo 4.1.7:** O conjunto dos pontos de acumulação do conjunto $A = \overline{B_1(0,0)} \cup \{(2,0)\}$ é o conjunto $\overline{B_1(0,0)}$. Observe que o ponto $(2,0)$ não é ponto de acumulação do conjunto $A$, pois toda bola aberta com centro em $(2,0)$ e raio menor do que 1, não possui pontos do conjunto $A$ diferentes do ponto $(2,0)$.

**Exemplo 4.1.8:** O conjunto dos pontos de acumulação do conjunto $A = B_1(0,0) \cup I$, onde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 2 \text{ e } y = 0\}$ é o conjunto $\overline{B_1(0,0)} \cup \overline{I}$, onde $\overline{I} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ e } y = 0\}$.

**Observação 4.1.1:** Se $X_0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação do conjunto $A$, podemos nos aproximar de $X_0$, o quanto quisermos, por uma sequência de pontos onde todos os pontos desta sequência pertencem a $A$. Esta definição será necessária para definir o conceito de limite de funções de várias variáveis reais, pois a possibilidade de aproximação de um ponto em $\mathbb{R}^n$ é bem mais diversificada do que simplesmente se aproximar pela direita ou pela esquerda, que eram os casos de aproximação vistos em Cálculo 1, onde os domínios das funções eram intervalos na reta.

**DEFINIÇÃO 4.1.5: (Ponto de Fronteira e Fronteira)** Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio, dizemos que $X_0 \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto de fronteira* de $A$, se toda bola aberta com centro em $X_0$ possuir pelo menos um ponto que pertence a $A$ e um ponto que não pertence a $A$. O conjunto dos pontos de fronteira de um conjunto $A$ é chamado de *fronteira* de $A$. A fronteira de $A$ é denotada por $\partial A$.

Observe que um ponto de fronteira $X_0$ de um dado conjunto $A$ não necessariamente pertence ao conjunto $A$. Caso ele pertença, pode acontecer que exista um raio $r_0$, de modo que o ponto do conjunto $A$ que pertence às bolas abertas centradas no ponto de fronteira $X_0$ com raio menor do que $r_0$ seja apenas o próprio ponto de fronteira $X_0$ (cf.

Exemplo 4.1.11 abaixo).

**Exemplo 4.1.9:** A fronteira da bola aberta $B_1(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x,y) \in x^2+y^2 < 1\}$ é a circunferência $x^2+y^2=1$.

**Exemplo 4.1.10:** A fronteira da bola fechada $\overline{B_1(0,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x,y) \in x^2+y^2 \leq 1\}$ é a circunferência $x^2+y^2=1$.

**Exemplo 4.1.11:** A fronteira do conjunto $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ é o conjunto vazio.

**Exemplo 4.1.12:** A fronteira do conjunto $B = \overline{B_1(0,0)} \cup \{(2,0)\}$ é a circunferência $x^2+y^2=1$ e o ponto $(2,0)$. Observe que qualquer bola aberta contendo $(2,0)$ e que não intercepta circunferência $x^2+y^2=1$, possui apenas um único ponto do conjunto $B$, que é o próprio ponto $(2,0)$.

**Exemplo 4.1.13:** A fronteira do conjunto $A = B_1(0,0) \cup I$, onde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 2 \text{ e } y = 0\}$ é o conjunto $C_1 \cup \overline{I}$, onde $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ e $\overline{I} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ e } y = 0\}$.

**DEFINIÇÃO 4.1.6: (Conjunto Fechado)** Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio, dizemos que $A$ é um *conjunto fechado* se ele contém todos os seus pontos de fronteira.

**Exemplo 4.1.14:** Toda bola fechada $\overline{B_r(X_0)} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, (x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2 \leq r^2\}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n$. Em particular, a bola fechada $\overline{B_r(x_0)} = [x_0 - r, x_0 + r]$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}$, a bola fechada $\overline{B_r(x_0, y_0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2\}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^2$ e a bola fechada $\overline{B_r(x_0, y_0, z_0)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-x_0)^2 + (y-y_0) =^2 + (z-z_0)^2 \leq r^2\}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^3$.

**Exemplo 4.1.15:** O conjunto $A = \overline{B_1(0,0)} \cup \{(2,0)\}$ é um conjunto fechado.

**Exemplo 4.1.16:** O conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^2$.

Vamos definir agora *conjuntos limitados* e *conjuntos compactos*.

**DEFINIÇÃO 4.1.7: (Conjunto Limitado)** Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio, dizemos que $A$ é um *conjunto limitado*, se existe $M > 0$, tal que $A \subseteq R$, onde $R$ é o "retângulo"em $\mathbb{R}^n$, dado por

$$R = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, -M \leq x_1 \leq M, -M \leq x_2 \leq M, ..., -M \leq x_n \leq M, \}.$$

**Exemplo 4.1.17:** Toda bola aberta e toda bola fechada em $\mathbb{R}^n$ de raio $r$ e centro em $X_0$ são conjuntos limitados em $\mathbb{R}^n$.

**Exemplo 4.1.18:** O conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 \leq y \leq 4\}$ é um conjunto limitado em $\mathbb{R}^2$.

**Exemplo 4.1.19:** O conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ NÃO é um conjunto limitado em $\mathbb{R}^2$.

**DEFINIÇÃO 4.1.8: (Conjunto Compacto)** Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio, dizemos que $A$ é um *conjunto compacto* se ele é fechado e limitado.

A definição de conjuntos compactos dada acima é específica para $\mathbb{R}^n$.

**Exemplo 4.1.20:** Toda bola fechada, em $\mathbb{R}^n$, de raio $r$ e centro em $X_0$ é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^n$.

**Exemplo 4.1.21:** O conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 \leq y \leq 4\}$ é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^2$.

**Exemplo 4.1.22:** O conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ NÃO é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^2$, pois, apesar de ser um conjunto fechado, ele não é um conjunto limitado.

Terminadas as noções de topologia, vamos agora passar à definição de limite de funções reais de várias variáveis.

## 4.2 Limite

Conforme já observado quando definimos limite de funções vetoriais de uma variável real, a essência deste conceito reside em uma análise de distâncias. Vamos portanto enunciá-la mais uma vez, utilizando a função distância.

**Definição de limite de funções da reta na reta reescrito em termos da função distância:** Seja $f$ a função real $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Suponha que $f$ está definida em um intervalo aberto contendo o ponto $x_0$ (exceto, possivelmente, no próprio ponto $x = x_0$). Dizemos que $f(x)$ *tende a* $l \in \mathbb{R}$, *quando* $x$ *tende a* $x_0$, cuja notação é $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), l) < \varepsilon.$$

**Tradução:** Dada uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida no intervalo aberto $I$ contendo $x_0$ (exceto possivelmente no próprio $x_0$), dizemos que $f$ possui limite $l$ quando $x$ tente a $x_0$ se, dado uma distância máxima que permitimos que $f(x)$ se afaste de $l$ (uma distância $\varepsilon$ dada), sempre é possível encontrar uma outra distância (uma distância $\delta$), tal que se $x$ não se afastar de $x_0$ uma distância maior do que esta distância encontrada (a distância $\delta$), o valor da função $f$, para pontos nesta vizinhança limitada, estará próximo de $l$ o quanto queremos (a distância $\varepsilon$ dada).

**Observação 4.2.1:** Observe que o conceito de limite avalia o comportamento da função nas proximidades do ponto $x_0$. Isto é, é avaliado se, para pontos suficientemente próximos de $x_0$, o valor da função nestes pontos está próximo de $l$ o quanto foi especificado. Sendo assim, precisamos que qualquer que seja a vizinhança que contém $x_0$, tenhamos pelo menos um ponto do domínio nesta vizinhança, para que possamos avaliar se o valor da função neste ponto é próximo de $l$ o tanto que se deseja. Sem garantias da existência de um ponto do domínio a distâncias arbitrariamente próximas de $x_0$, o estudo do comportamento da função nestas vizinhanças não faria sentido. Vendo sob este aspecto, podemos observar que $x_0$ deve ser um ponto de acumulação do domínio de $f$ para que a avaliação do limite da função quando $x$ tende a $x_0$ faça sentido. Para funções de uma variável real, definidas em intervalos, note que um ponto $x_0$ pertencente a um intervalo aberto $I$ é trivialmente um ponto de acumulação de $I$.

Diante da observação feita acima, vamos definir limite de funções reais de uma variável real utilizando o conceito de ponto de acumulação. Note a elegância.

**Limite de funções reais de uma variável real:** Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de uma variável real e seja $x_0$ um ponto de acumulação de $Dom(f)$. Dizemos que $f(x)$ *tende a* $l$, $l \in \mathbb{R}$, *quando* $x$ *tende a* $x_0$, cuja notação é $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < |x - x_0| < \delta, x \in Dom(f) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Uma vez esclarecida a necessidade do ponto $x_0$ ser um ponto de acumulação do domínio da função para podermos definir limite de funções reais de $n$ variáveis reais, falta apenas adequar a parte referente a distância entre pontos do domínio. Antes, em Cálculo

1A, para funções de uma variável real, a distância entre pontos do domínio era dada pelo módulo. Agora, a noção de distância entre pontos do domínio de funções de várias variáveis reais utiliza a norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$ (espaço euclidiano $n$-dimensional).

**DEFINIÇÃO 4.2.1: (Limite)** Seja $f$ a função real de várias variáveis $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $X_0$ um ponto de acumulação de $Dom(f)$. Dizemos que $f(X)$ *tende a* $l$, $l \in \mathbb{R}$, *quando* $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *tende a* $X_0$, cuja notação é $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = l$, se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < ||X - X_0|| = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2} < \delta, \; X \in Dom(f) \Rightarrow |f(X) - l| < \varepsilon.$$

Desta forma, para a função real de duas variáveis

$$\begin{array}{rcccc} f & : & Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array},$$

temos que, $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = l$ se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta, \; (x, y) \in Dom(f) \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon.$$

**Exemplo 4.2.1:** Mostre que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{5x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$

**Solução:** Aplicando a definição, temos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$, se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left|\frac{5x^2y}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon.$$

Observando que

$$\left|\frac{5x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{5x^2}{x^2+y^2}\,|y| \overset{*}{\leq} 5|y| \overset{**}{\leq} 5\sqrt{x^2+y^2}, \tag{1}$$

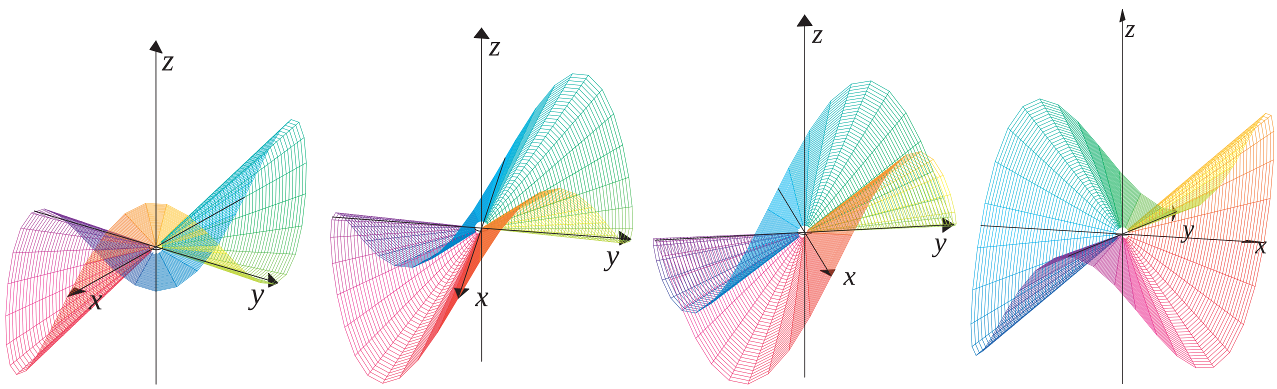
para $\varepsilon > 0$ dado, basta fazer $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$. De fato, se $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$, segue que

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow 5\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon,$$

portanto, de (1), temos que

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow \left|\frac{5x^2y}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon,$$

conforme desejado. Explicações das desigualdades: $(*)$ $0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$ e $(**)$ $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$). Abaixo temos um esboço da gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$ sob diferentes ângulos, para facilitar a visualização.




$\heartsuit$

Vejamos agora as propriedades de limite. Cabe ressaltar que vimos todas as versões destas propriedades para funções da reta na reta em Cálculo 1A.

**TEOREMA 4.2.1:** Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $X_0$ um ponto de acumulação de $Dom(f)$, então

$$\lim_{X\to X_0} f(X) = l \Leftrightarrow \lim_{X\to X_0} f(X) - l = 0.$$

**TEOREMA 4.2.2:** Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $X_0$ um ponto de acumulação de $Dom(f)$, então

$$\lim_{X\to X_0} f(X) = l \Leftrightarrow \lim_{Y\to 0} f(Y+X_0) = l.$$

**TEOREMA 4.2.3: (Propriedades de Limite)** Considere as funções $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tais que $\lim_{X\to X_0} f(X) = l$, $\lim_{X\to X_0} g(X) = p$ e seja $k \in \mathbb{R}$. Neste caso, temos que

a) $\lim_{X\to X_0}(f \pm g)(X) = l \pm p$;
b) $\lim_{X\to X_0}(kf)(X) = kl$;
c) $\lim_{X\to X_0}(fg)(X) = lp$;
d) $\lim_{X\to X_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(X) = \dfrac{l}{p}$, se $p \neq 0$;
e) $\lim_{X\to X_0}|f(X)| = |l|$.

**TEOREMA 4.2.4:** Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $X_0$ um ponto de acumulação de $Dom(f)$, então

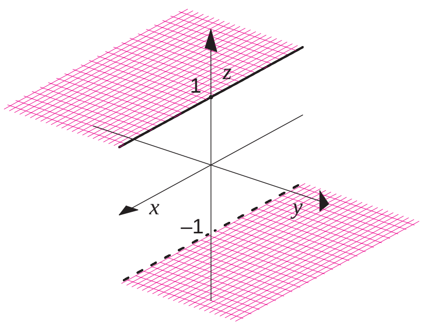
$$\lim_{X\to X_0} f(X) = 0 \Leftrightarrow \lim_{X\to X_0} |f(X)| = 0.$$

**Observação 4.2.1:** Note que é fundamental no Teorema 4.2.4 que o valor do limite seja 0, pois caso contrário, é possível ter $\lim_{X\to X_0}|f(X)| = l \neq 0$, sem que sequer exista $\lim_{X\to X_0} f(X)$. Por exemplo, para a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \leq 0 \\ -1, & \text{se } y > 0 \end{cases},$$

temos que $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}|f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} 1 = 1$, $x_0 \in \mathbb{R}$, enquanto que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Este exemplo é uma extensão do exemplo da função da reta na reta,

$$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \leq 0 \\ -1, & \text{se } y > 0 \end{cases}.$$




**TEOREMA 4.2.5:** Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função polinomial, então $\lim_{X\to X_0} f(X) = f(X_0)$.

**Exemplo 4.2.2:** Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} 5x^2y + xy^2$.

**Solução:** Como a função $f(x,y) = 5x^2y + xy^2$ é polinomial, temos pelo Teorema 4.2.5 acima que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(1,0)} 5x^2y + xy^2 \\ &= f(1,0) = 0.\end{aligned}$$

♡

**TEOREMA 4.2.6:** Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função racional, e seja $X_0$ um ponto de $Dom(f)$, então $\lim_{X\to X_0} f(X) = f(X_0)$.

**Exemplo 4.2.3:** Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$.

**Solução:** Observe que o domínio da função racional $f(x,y) = \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$ é dado por $Dom(f) = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Portanto, o ponto $(x_0, y_0) = (1,2) \in Dom(f)$. Desta forma, pelo Teorema 4.2.6 acima, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} \\ &= f(1,2) = \frac{5.1^2.2}{1^2+2^2} = 2.\end{aligned}$$

♡

**TEOREMA 4.2.7: (Teorema do Confronto (ou do Sanduíche))** Sejam $f, g, h : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $X_0$ um ponto de acumulação de $D$. Suponha que existe uma vizinhança $V(X_0)$ de $X_0$ tal que $f(X) \leq g(X) \leq h(X)$ para todo $X \in (V(X_0)\backslash\{X_0\}) \cap D$. Desta forma, se $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = l$ e $\lim\limits_{X\to X_0} h(X) = l$ então, $\lim\limits_{X\to X_0} g(X)$ também existe e

$$\lim_{X\to X_0} g(X) = l.$$

**TEOREMA 4.2.8: (Teorema do Anulamento)** Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $X_0$ um ponto de acumulação de $D$. Se $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = 0$ e existe uma vizinhança $V(X_0)$ de $X_0$ tal que $g$ é limitada em $V(X_0) \cap D$, então $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)g(X)$ também existe e

$$\lim_{X\to X_0} f(X)g(X) = 0.$$

**Exemplo 4.2.4:** Calcule, caso exista, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$.

**Solução:** Observe que a função $g(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada, uma vez que $0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$. Além disso, a função $f(x,y) = 5y$ é tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 5y = 0$. Portanto, estamos diante do limite do produto de duas funções que satisfazem as condições do Teorema do Anulamento. Sendo assim, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 5y \,.\, \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0.$$

(Esta função é a mesma do Exemplo 4.2.1.)

♡

**Exemplo 4.2.5:** Calcule, caso exista, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$.

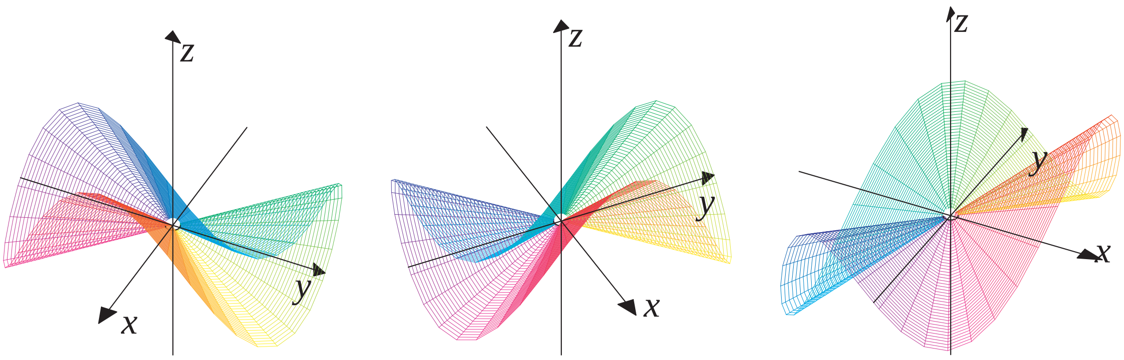
**Solução:** Observe que a função $g(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ é limitada, uma vez que

$$0 \leq \left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1.(*)$$

((*)Lembre-se que $||a|-|b|| \leq |a-b| \leq |a|+|b|, \forall a,b \in \mathbb{R}$.) Além disso, a função $f(x,y) = x$ é tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$. Portanto, estamos diante do limite do produto de duas funções que satisfazem as condições do Teorema do Anulamento. Sendo assim, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \,.\, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Abaixo temos um esboço da gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$.




♡

**TEOREMA 4.2.9:** Sejam $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $Im(g) \subseteq Dom(f)$. Seja $X_0$ um ponto de acumulação de $Dom(g)$. Suponha que $\lim_{X \to X_0} g(X) = a$ e que $a$ é um ponto de acumulação de $Dom(f)$. Se $f$ não está definida em $a$ ou se $f$ é contínua em $a$, então

$$\lim_{X \to X_0} f(g(X)) = \lim_{u \to a} f(u).$$

**Observação 4.2.2:** Utilizamos a versão deste teorema dada em Cálculo 1A (neste caso, $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) para calcular limites do tipo $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\tan(x))}{\tan x}$. Neste caso, $g(x) = \tan x$, $f(u) = \dfrac{\operatorname{sen} u}{u}$, $x_0 = 0$, $a = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \tan x = 0$ e $f(u) = \dfrac{\operatorname{sen} u}{u}$ não está definida em $a = 0$, de modo que

$$\lim_{x \to x_0} f(g(X)) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\tan(x))}{\tan x} = \lim_{u \to a} f(u) = \lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1.$$

**Exemplo 4.2.6:** Verifique se $\lim\limits_{(x,y) \to (1,2)} \dfrac{1 - \cos(xy - 2x)}{x^2(y-2)^2}$ existe.

**Solução:** Neste caso, observe que desejamos saber $\lim_{X \to X_0} f(g(X))$, onde $g(x, y) = x(y-2)$, $f(u) = \dfrac{1 - \cos u}{u^2}$, $X_0 = (1, 2)$, $a = \lim\limits_{(x,y) \to (1,2)} g(x, y) = \lim\limits_{x \to 0} x(y-2) = 0$ e $f(u) = \dfrac{1 - \cos u}{u^2}$ não está definida em $a = 0$. Portanto, pelo Teorema 4.2.9, temos que

$$\lim_{X \to X_0} f(g(X)) = \lim_{(x,y) \to (1,2)} \frac{1 - \cos(xy - 2x)}{x^2(y-2)^2} = \lim_{u \to a} f(u) = \lim_{u \to 0} \frac{1 - \cos u}{u^2} = \frac{1}{2}.$$

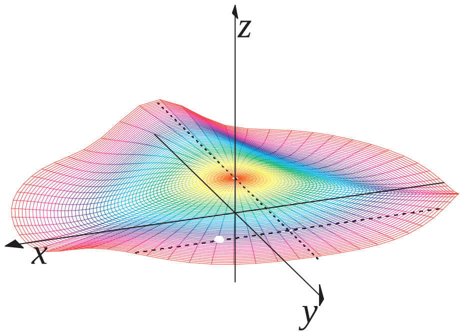
Observe que também podemos aplicar este mesmo raciocínio para determinar

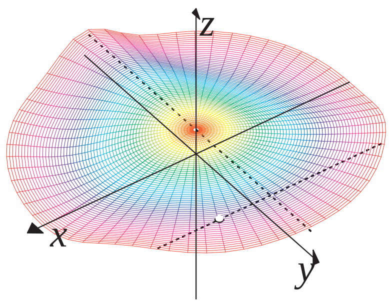
$$\lim_{(x,y) \to (x_0,2)} \frac{1 - \cos(xy - 2x)}{x^2(y-2)^2} \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \to (0,y_0)} \frac{1 - \cos(xy - 2x)}{x^2(y-2)^2}.$$

Desta forma, também obtemos que

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,2)} \frac{1 - \cos(xy - 2x)}{x^2(y-2)^2} = \frac{1}{2} = \lim_{(x,y) \to (0,y_0)} \frac{1 - \cos(xy - 2x)}{x^2(y-2)^2}.$$

Abaixo temos um esboço do gráfico de $f$ sob diferentes ângulos para facilitar a visualização. Observe que o domínio da função $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy-2x)}{x^2(y-2)^2}$ é dado por $Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ e } y \neq 2\}$, de modo que os pontos correspondentes às duas retas $x = 0$ e $y = 2$, encontram-se tracejados.




♡

**Observação 4.2.3:** Caso $f$ esteja definida em $a$ e não seja contínua neste ponto, as funções reais de variáveis reais abaixo servem para exemplificar (conforme visto em Cálculo 1A) que a igualdade $\lim\limits_{X\to X_0} f(g(X)) = \lim\limits_{u\to a} f(u)$ pode falhar. Considere as funções $f(u) = \begin{cases} u+1, & u \neq 1 \\ 5, & u = 1 \end{cases}$ e $g(x) = 1$ para todo $x$ real. Escolhendo $x_0 = 3$, observe que $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = \lim\limits_{x\to 3} 1 = 1$, de modo que $a = 1$. Além disso, temos que $\lim\limits_{u\to 1} f(u) = 2$ mas, $\lim\limits_{x\to 3} f(g(x)) = \lim\limits_{x\to 3} 5 = 5 \neq 2 = \lim\limits_{u\to 1} f(u)$.

**Observação 4.2.4:** Sabendo que $\lim_{X\to X_0} g(X) = a$, se existir uma vizinhança $V(X_0)$ de $X_0$ tal que $g(X) \neq a$ para todo $X \in V(X_0) \cap Dom(g)$, $\lim_{X\to X_0} g(X) = a$, a igualdade $\lim_{X\to X_0} f(g(X)) = \lim_{u\to a} f(u)$ do Teorema 4.2.9 também irá valer, independente do comportamento de $f$ em $a$. Reformulando o enunciado do Teorema 4.2.9 para incluir este caso, ficamos com o seguinte enunciado: *"Sejam $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $Im(g) \subseteq Dom(f)$. Seja $X_0$ um ponto de acumulação de $Dom(g)$. Suponha que $\lim_{X\to X_0} g(X) = a$ e que $a$ é um ponto de acumulação de $Dom(f)$. Se $f$ não está definida em $a$ ou se $f$ é contínua em $a$ ou ainda se existe uma vizinhança $V(X_0)$ de $X_0$ tal que $g(X) \neq a$ para todo $X \in (V(X_0)\backslash\{X_0\}) \cap Dom(g)$, então $\lim_{X\to X_0} f(g(X)) = \lim_{u\to a} f(u)$."*

Observe que, pelo o Teorema 4.2.9 acima, se $\lim_{X\to X_0} g(X) = a$ e $f$ é uma função contínua em $a$, então,

$$\lim_{X\to X_0} f(g(X)) = \lim_{u\to a} f(u) = f(a) = f\left(\lim_{X\to X_0} g(X)\right).$$

Em outras palavras, temos que se $f$ é uma função contínua, podemos "passar o limite para dentro", de modo que: "o limite da $f$ é igual a $f$ do limite". Pela importância deste resultado, que é a própria caracterização de funções contínuas, vamos enunciá-lo abaixo.

**COROLÁRIO 4.2.1:** Sejam $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $Im(g) \subseteq Dom(f)$. Seja $X_0$ um ponto de acumulação de $Dom(g)$ e suponha que $\lim_{X \to X_0} g(X) = a$. Se $a$ é um ponto de acumulação de $Dom(f)$ e $f$ é contínua em $a$, então

$$\lim_{X \to X_0} f(g(X)) = f\left(\lim_{X \to X_0} g(X)\right).$$

Agora vamos ver um teorema que é de grande utilidade para demonstrar que uma dada função NÃO possui limite.

**TEOREMA 4.2.10:** Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $X_0$ um ponto de acumulação de $Dom(f)$. Suponha que $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = l$. Considere agora a curva $C$ parametrizada pela função contínua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, tal que $\gamma(t_0) = X_0$, $t_0 \in [a, b]$. Suponha que, para todo $t \neq t_0$, tem-se que $\gamma(t) \neq X_0$, e que, $\gamma(t) \in Dom(f)$, $\forall t \in [a, b]$, $t \neq t_0$. Neste caso, segue que

$$\lim_{t \to t_0} f(\gamma(t)) = l,$$

ou um limite lateral apropriado.

Observe que se for possível encontrar uma curva $C_1 \subset Dom(f) \cup \{X_0\}$, parametrizada pela função $\gamma_1$, e uma curva $C_2 \subset Dom(f) \cup \{X_0\}$, parametrizada pela função $\gamma_2$, de modo que $\gamma_1(u_0) = X_0 = \gamma_2(v_0)$ e tal que $\lim\limits_{u \to u_0} f(\gamma_1(u)) \neq \lim\limits_{v \to v_0} f(\gamma_2(v))$ (ou um limite lateral apropriado), podemos concluir pelo Teorema 4.2.10 acima, que NÃO existe $\lim\limits_{X \to X_0} f(X)$.

Faça um paralelo entre o teorema acima e o teorema que estudamos em Cálculo 1A:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

**Exemplo 4.2.7:** Verifique se $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ existe.

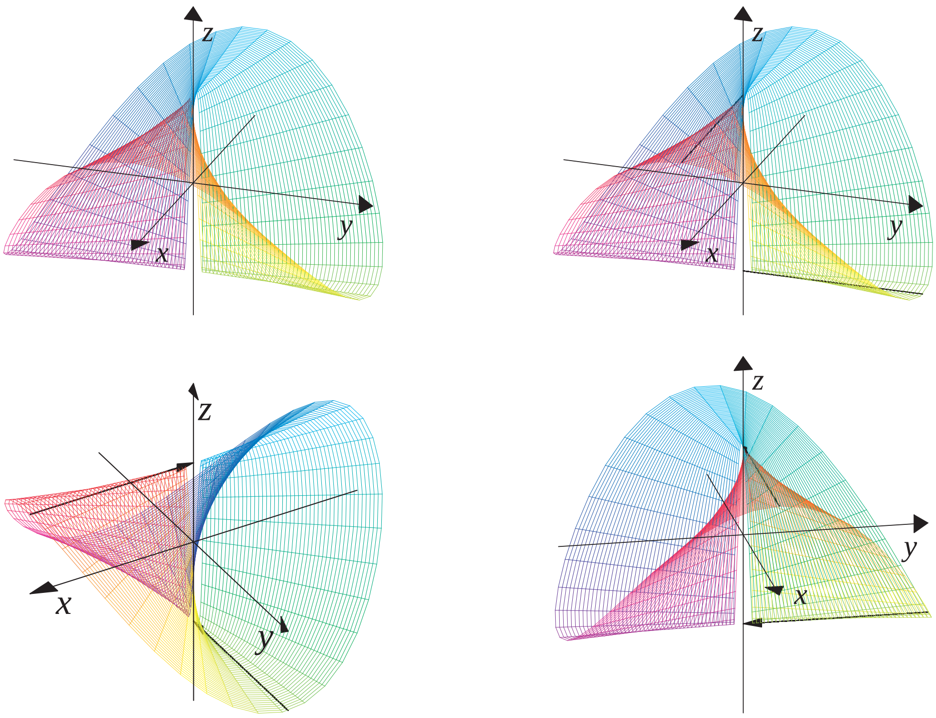
**Solução:** Considere $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Vamos mostrar que o limite acima não existe apresentando dois caminhos distintos de aproximação à origem, tais que o limite ao longo destes caminhos não são iguais. Para isto, considere a curva $C_1$ parametrizada por $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $t \geq 0$ e a curva $C_2$ parametrizada por $\gamma_2(t) = (0, t)$, $t \geq 0$. Desta forma, calculando separadamente, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ao longo das curvas $C_1$ e $C_2$, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_1}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2-0}{t^2+0} = \lim_{t\to 0^+} 1 = 1,$$

e

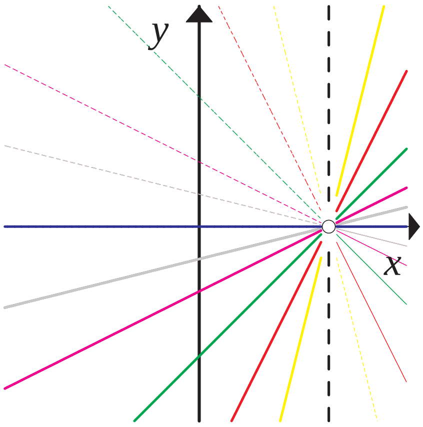
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_2}} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{0-t^2}{0+t^2} = \lim_{t\to 0^+} -1 = -1.$$

Como os limites ao longo de dois caminhos diferentes de aproximação à origem são distintos, temos que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Abaixo temos um esboço da gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ sob diferentes ângulos, para evidenciar os caminhos de aproximação $C_1$ e $C_2$.




♡

**Exemplo 4.2.8:** Abaixo encontram-se esboçadas as curvas de nível da função $f : Dom(f) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde $Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 1\}$. Curvas de cores e estilos diferentes são referentes a diferentes níveis. Com base nestas informações, verifique se $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$ existe. Justifique.




**Solução:** Vamos supor que a semi-reta vermelha e com traço ininterrupto acima do eixo $x$ é parte do conjunto de nível de $f$ correspondente ao nível $k_1$ e vamos chamar a união do ponto $(1,0)$ com esta semi-reta vermelha de $C_1$. Da mesma forma, Vamos supor que a semi-reta verde e com traço ininterrupto acima do eixo $x$ é parte do conjunto de nível de $f$ correspondente ao nível $k_2$ e vamos chamar a união do ponto $(1,0)$ com esta semi-reta verde de $C_2$. Conforme dito no enunciado, curvas de cores e estilos diferentes são referentes a diferentes níveis, de modo que $k_1$ e $k_2$ são distintos. Além disso, de acordo com a definição de curva de nível, temos que se $(x,y) \neq (1,0)$ e $(x,y) \in C_i, i = 1,2$, então $f(x,y) = k_i, i = 1,2$. Portanto, calculando separadamente $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$ ao longo das curvas $C_1$ e $C_2$, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0) \\ \textit{ao longo de } C_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(1,0) \\ \textit{ao longo de } C_1}} k_1 = k_1,$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0) \\ \textit{ao longo de } C_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(1,0) \\ \textit{ao longo de } C_2}} k_2 = k_2.$$

Sendo assim, temos que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$ não existe pois, encontramos caminhos diferentes de aproximação à origem (partes de curvas de níveis correspondentes a diferentes níveis,) ao longo dos quais os valores dos limites são distintos.

♡

**Observação 4.2.5:** Conforme verificado no exemplo anterior, se estivermos analisando $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ e soubermos que partes de diferentes curvas de nível da função $f$ "desembocam" em $(x_0,y_0)$, isto nos informa que o limite mencionado não existe, pois cada parte $C_i$ de uma curva de nível correspondente ao nível $k_i$, fornece um caminho de aproximação ao ponto $(x_0,y_0)$, ao longo do qual o limite vale $k_i$. A função do exemplo anterior é a função $f(x,y) = \dfrac{y}{x-1}$ do Exemplo 3.3.1c. Os conjuntos de nível $k_i$ de $f$ são as semi-retas $y = k_i(x-1)$, $x \neq 1$. Por exemplo, para $k_1 = 1$, temos as semi-retas $y = x-1$, $x > 1$ e $y = x-1$, $x < 1$, já para $k_2 = 2$, temos as semi-retas $y = 2x-2$,

$x > 1$ e $y = 2x - 2$, $x < 1$. Desta forma, chamando de $C_1$ a união do ponto $(1, 0)$ com a parte do conjunto de nível de $f$ correspondente ao nível $k_1 = 1$ que está acima do eixo $x$ ($C_1 : y = x - 1$, $x \geq 1$) parametrizada por $\gamma_1(t) = (t, t - 1)$, $t \geq 1$, e de $C_2$ a união do ponto $(1, 0)$ com parte a parte do conjunto de nível de $f$ correspondente ao nível $k_2 = 2$ ($C_2 : y = 2x - 2$, $x \geq 1$) parametrizada por $\gamma_2(t) = (t, 2t - 2)$, $t \geq 1$, e calculando separadamente $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y}{x-1}$ ao longo das curvas $C_1$ e $C_2$, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ \text{ao longo de } C_1}} \frac{y}{x-1} = \lim_{t\to 1^+} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 1^+} \frac{t-1}{t-1} = \lim_{t\to 1^+} 1 = 1,$$

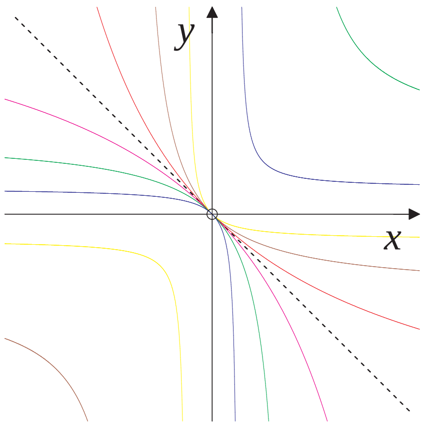
e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ \text{ao longo de } C_2}} \frac{y}{x-1} = \lim_{t\to 1^+} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 1^+} \frac{2t-2}{t-1} = \lim_{t\to 1^+} 2 = 2.$$

Realmente, conforme dito, os limites ao longo das partes das diferentes curvas de nível $k_i$, $i = 1, 2$, fornecem limites distintos e iguais a $k_i$, $i = 1, 2$, respectivamente. Portanto, o limite de fato não existe.

**Exemplo 4.2.9:** Use curvas de nível para verificar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$ não existe.

**Solução:** No Exemplo 3.11.2, determinamos as curvas de nível desta função. Algumas curvas de nível de $f$ encontram-se esboçadas abaixo, onde cores diferentes correspondem a níveis diferentes. Observe, na figura abaixo,construída no Exemplo 3.11.2, que temos partes de curvas de nível diferentes "desembocando" na origem.




Escolhendo $k_1 = 1$ e $k_2 = 2$, temos que o conjunto de nível de $f$ correspondente a $k_1$ é dado por $y = \dfrac{x}{x-1}$, com $x \neq 0$ e $x \neq 1$ e o conjunto de nível de $f$ correspondente a $k_2$ é dado por que $y = \dfrac{2x}{x-2}$, com $x \neq 0$ e $x \neq 2$.
Vamos chamar de $C_1$ a união do ponto $(0, 0)$ com a parte da curva de nível $k_1 = 1$, cuja parametrização é $\gamma_1(t) = (t, t/(t-1))$, $0 \leq t \leq 1/2$, e de $C_2$ a união do ponto $(0, 0)$ com a parte da curva de nível $k_1 = 2$, cuja parametrização é $\gamma_2(t) = (t, 2t/(t-2))$, $0 \leq t \leq 1$ e calcular separadamente $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$ ao longo das curvas $C_1$ e $C_2$. Desta

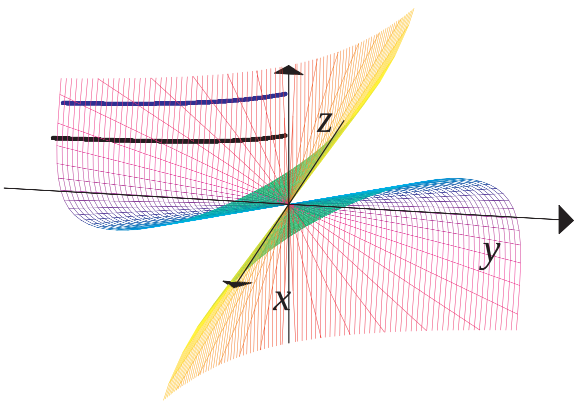
forma, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{ao longo de } C_1}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\,\dfrac{t}{t-1}}{t+\dfrac{t}{t-1}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\dfrac{t^2}{t-1}}{\dfrac{t^2-t+t}{t-1}} = \lim_{t\to 0^+} 1 = 1,$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{ao longo de } C_2}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\,\dfrac{2t}{t-2}}{t+\dfrac{2t}{t-2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\dfrac{2t^2}{t-2}}{\dfrac{t^2-2t+2t}{t-2}} = \lim_{t\to 0^+} 2 = 2.$$

Realmente, conforme dito, os limites ao longo de partes de curvas de nível relativas a níveis diferentes fornecem limites distintos, de modo que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$ não existe. Abaixo temos um esboço do gráfico de $f$ com os dois caminhos de aproximação ilustrados.




♡

**Observação 4.2.6:** No exemplo acima (Exemplo 4.2.9) observe que ao longo de qualquer reta que contém a origem, temos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y} = 0$. De fato, considere $C_m$ a curva dadas na forma paramétrica por $\gamma_m(t) = (t, mt)$, $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{ao longo de } C_m}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{t\to 0} f(\gamma_m(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{mt^2}{t+mt} = \lim_{t\to 0} \frac{mt}{1+m} = 0.$$

Esta observação sobre este exemplo ilustra o fato de que não basta termos a informação de que ao longo de infinitos caminhos de aproximação do ponto $X_0$ o limite existe e vale $l$ para concluir que o limite da função quando $X$ tende a $X_0$ existe e vale $l$. Basta que exista um único caminho de aproximação do ponto $X_0$, ao longo do qual o limite não existe ou não vale $l$, para que o limite da função quando $X$ tende a $X_0$ não exista.

## 4.3 Continuidade

**DEFINIÇÃO 4.3.1: (Continuidade)** Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $X_0 \in Dom(f)$ um ponto de acumulação de $Dom(f)$. Dizemos que $f$ é *contínua* em $X_0$, se $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$.

**Exemplo 4.3.1:** Verifique se

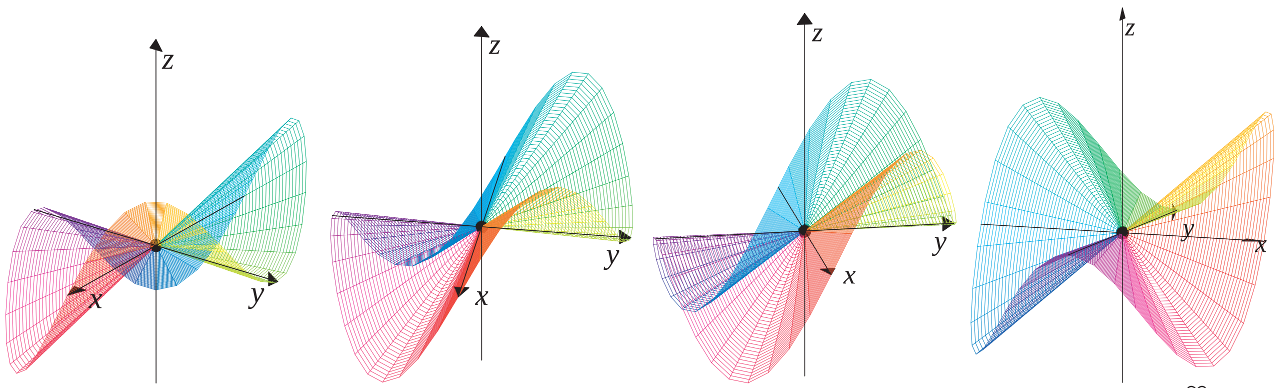
$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

**Solução:** Vimos no Exemplo 4.2.4 que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$. Portanto, temos que $g$ é contínua em $(0,0)$, uma vez que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \quad = \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0 = g(0,0).$$

Abaixo temos um esboço do gráfico de $g$, observe que o "furo"na origem que existia referente ao esboço do gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$ (Exemplos 4.2.1 e 4.2.4), foi "tapado".




♡

**Exemplo 4.3.2:** Verifique se

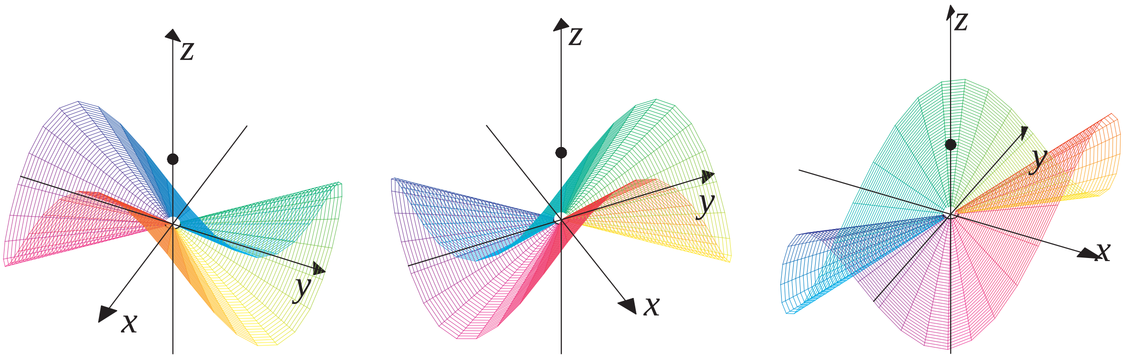
$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 3; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

**Solução:** Vimos no Exemplo 4.2.5 que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} = 0$. Portanto, temos que $g$ não é contínua em $(0,0)$, uma vez que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \quad = \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} = 0 \neq 3 = g(0,0).$$

Abaixo temos um esboço do gráfico da função $g$.




♡

**Exemplo 4.3.3:** Verifique se

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

**Solução:** Vimos no Exemplo 4.2.7 que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2+y^2}$ não existe. Portanto, $f$ não é contínua em $(0,0)$.

♡

**Exemplo 4.3.4:** Verifique se

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

**Solução:** Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ não parece se encaixar em nenhum dos teoremas vistos anteriormente (trata-se apenas de uma função limitada sozinha), vamos partir para tentar mostrar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ não existe. Para isto, vamos escolher dois caminhos de aproximação à origem diferentes e mostrar que ao longo destes caminhos os limites não são iguais. Considere então a curva $C_1$ parametrizada pela função $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $t \geq 0$ e a curva $C_2$ parametrizada pela função $\gamma_2(t) = (t, t)$, $t \geq 0$. Desta forma, calculando separadamente $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ ao longo das curvas $C_1$ e $C_2$, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_1}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{0}{t^2+0} = \lim_{t\to 0^+} 0 = 0,$$

e

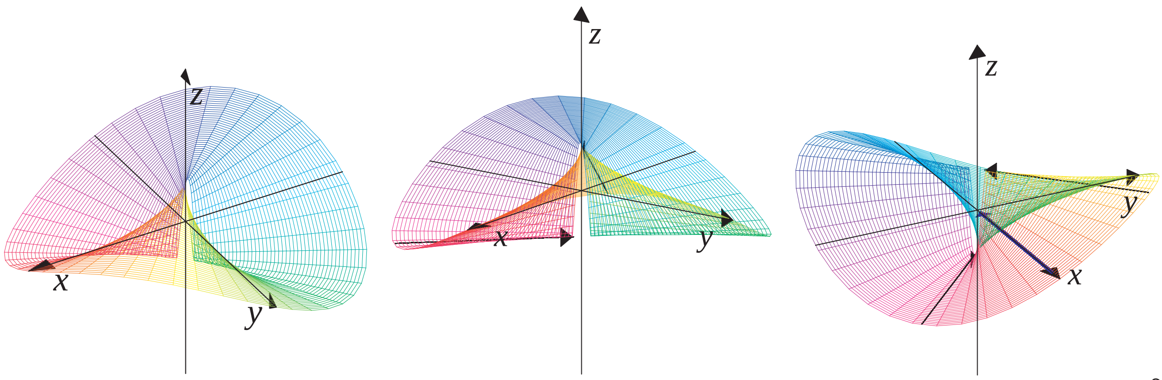
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_2}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{t^2+t^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Sendo assim, como os limites ao longo de dois caminhos diferentes de aproximação à origem são distintos, temos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ não existe. Portanto, $f$ não é contínua em $(0, 0)$, uma vez que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \nexists.$$

Abaixo temos um esboço da gráfico da função $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ sob diferentes ângulos, para evidenciar os caminhos de aproximação $C_1$ e $C_2$. Além disto, vamos incluir um novo caminho de aproximação, ao longo da curva $C_3$, que é interessante em matéria de visualização. Considere portanto a curva $C_3$ parametrizada pela função $\gamma_3(t) = (t, -t)$, $t \geq 0$. Desta forma, calculando $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ ao longo da curva $C_3$, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_3}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_3(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{-t^2}{t^2+t^2} = \lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$




♡

**Exemplo 4.3.5:** Verifique se

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

**Solução:** Observe que a função $g(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ é limitada, uma vez que

$$0 \leq \left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{y^2}{x^2+y^2}} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} = 1,$$

de modo que

$$-1 \leq \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1.$$

Além disso, a função $f(x,y) = 2x$ é tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x = 0$. Portanto, estamos diante do limite do produto de duas funções que satisfazem as condições do Teorema do Anulamento. Sendo assim, segue que

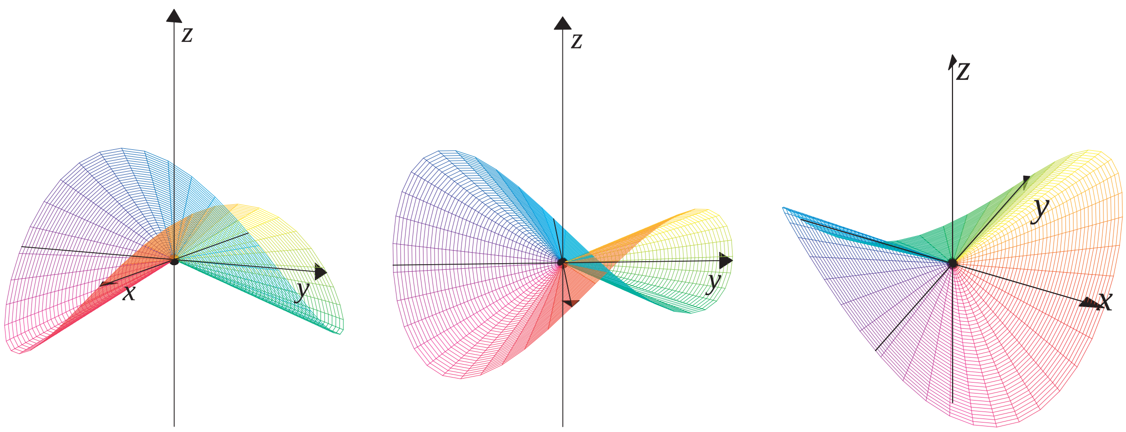
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Portanto, temos que $f$ é contínua em $(0,0)$, uma vez que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0).$$

♡

Abaixo temos um esboço da gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sob diferentes ângulos.




♡

Vejamos agora as propriedades de continuidade.

**TEOREMA 4.3.1:** Seja $k \in \mathbb{R}$ e sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, funções contínuas em $X_0$. Neste caso, temos que

a) As funções $kf$, $f \pm g$, $fg$ também são contínuas em $X_0$;
b) Se $g(X_0) \neq 0$, então a função $\dfrac{f}{g}$ também é contínua em $X_0$.

Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $B \subseteq Dom(f)$ um conjunto de pontos de acumulação de $Dom(f)$. Dizemos então que $f$ é *contínua* em $B$, se $f$ é *contínua* em todos os pontos de $B$.

**TEOREMA 4.3.2:** As funções polinomiais em $\mathbb{R}^n$ são contínuas em $\mathbb{R}^n$.

**TEOREMA 4.3.3:** As funções racionais em $\mathbb{R}^n$ são contínuas em seus domínios.

**Exemplo 4.3.6:** Considere a função

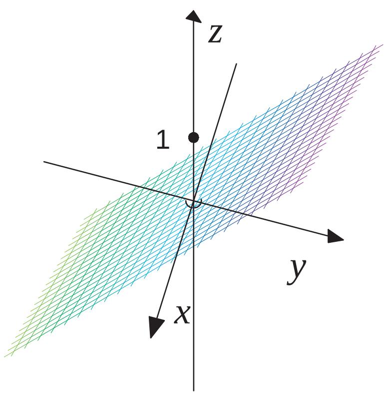
$$f(x,y) = \begin{cases} x + 2y; & (x,y) \neq (0,0) \\ 1; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Determine os pontos onde $f$ é contínua.

**Solução:** Observe que no aberto $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, temos que $f(x,y) = x + 2y$ que, por ser polinomial, é contínua (Teorema 4.3.2). Portanto temos que $f$ é contínua em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Resta então analisar se $f$ é contínua na origem. Neste caso, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x + 2y = 0 \neq 1 = f(0,0),$$

de modo que $f$ não é contínua na origem. Abaixo temos um esboço do gráfico da função $f$.



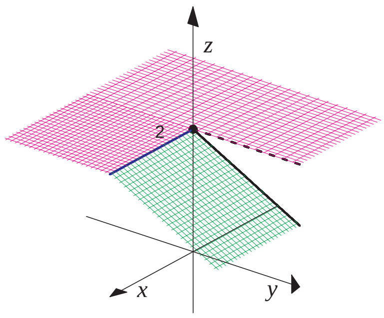

♡

**Exemplo 4.3.7:** Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{y}{2} + 2; & x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 2; & \text{no restante} \end{cases}.$$

Esboce o gráfico de $f$ determine os pontos onde $f$ é contínua.

**Solução:**




Pelo gráfico esboçado acima, podemos ver que $f$ é contínua em todo plano, exceto no semi-eixo $y$ positivo, i.e. no conjunto da forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y > 0\}$. (Observe que $f$ também é contínua na origem.) De fato, dividindo em casos, temos que:
Caso 1: se $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$, então $f(x_0, y_0) = -\dfrac{y_0}{2} + 2$, de modo que $f$ é contínua por ser polinomial.
Caso 2: se $x_0 < 0$ ou $y_0 < 0$, $f(x_0, y_0) = 2$, de modo que $f$ é contínua por ser constante.
Caso 3: se $y_0 = 0$ e $x_0 > 0$, $f$ também é contínua, pois

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y\geq 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y\geq 0}} -\frac{y}{2} + 2 = 2 = f(x_0, 0)$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y\leq 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y\leq 0}} 2 = 2 = f(x_0, 0).$$

Caso 4: se $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $f$ também é contínua, pois $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 2$. De fato,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\geq 0, y\geq 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\geq 0, y\geq 0}} -\frac{y}{2} + 2 = 2$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{no resto}}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{no resto}}} 2 = 2.$$

Caso 5: se $x_0 = 0$ e $y_0 > 0$, $f$ é descontínua, pois $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x, y)$. De fato,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\geq 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\geq 0}} -\frac{y}{2} + 2 = -\frac{y_0}{2} + 2 (\text{onde } y_0 > 0)$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\leq 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0,0)\\ x\leq 0}} 2 = 2,$$

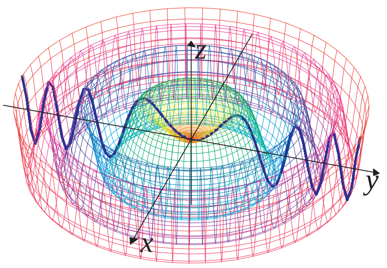
♡

Como consequência do Corolário 4.2.2 da seção anterior, temos que a composta de funções contínuas também é uma função contínua. Confira o corolário a seguir.

**COROLÁRIO 4.3.1:** Sejam $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $Im(g) \subseteq Dom(f)$. Seja $X_0$ um ponto de acumulação de $Dom(g)$ e seja $g(X_0)$ um ponto de acumulação de $Dom(f)$. Se $g$ é contínua em $X_0$ e $f$ é contínua em $g(X_0)$, então $f \circ g$ também é contínua em $X_0$.

**Exemplo 4.3.8:** Verifique se a função $h(x, y) = \text{ sen}\,(x^2 + y^2)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

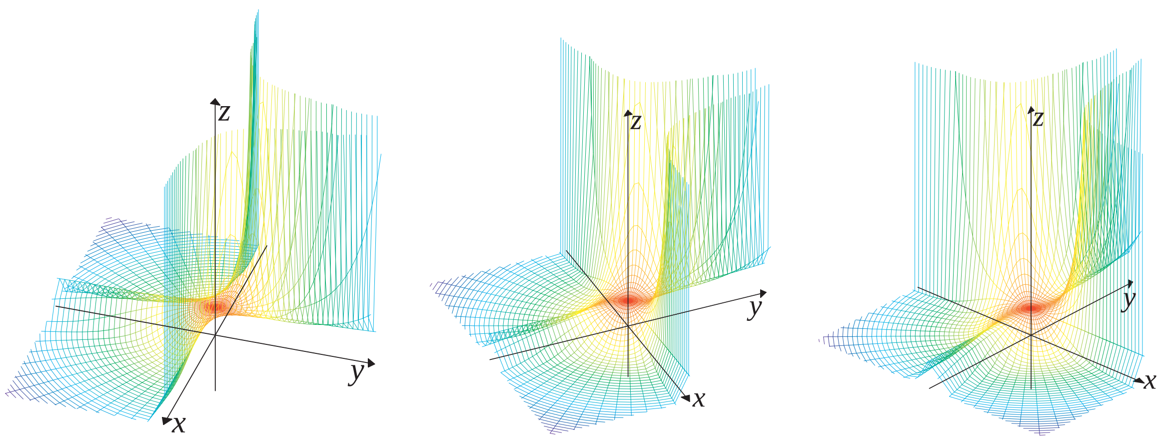
**Solução:** Observe que $h(x, y) = \text{ sen}\,(x^2 + y^2)$, é a composta das funções $f(t) = \text{ sen}\,t$ e $g(x, y) = x^2 + y^2$, i.e. $h(x, y) = f(g(x, y))$. Como a função $g$ é trivialmente contínua em todo o plano, pois é uma função polinomial (Teorema 4.3.2), e a função $f$ também é uma função contínua em toda reta, pelo Corolário 4.3.1, temos que $h$ é contínua em todo $\mathbb{R}^2$.




♡

**Exemplo 4.3.9:** Verifique se a função $h(x, y) = e^{x^2 y}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

**Solução:** Observe que $h(x, y) = e^{x^2 y}$, é a composta das funções $f(t) = e^t$ e $g(x, y) = x^2 y$, i.e. $h(x, y) = f(g(x, y))$. Como a função $g$ é trivialmente contínua em todo o plano, pois é uma função polinomial (Teorema 4.3.2), e a função $f$ também é uma função contínua em toda reta, pelo Corolário 4.3.1, temos que $h$ é contínua em todo $\mathbb{R}^2$.



$\heartsuit$

**Exemplo 4.3.10:** Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Determine os pontos onde $f$ é contínua.

**Solução:** Observe que se $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, temos que $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, que é o quociente das funções $p(x,y) = x+y$ e $q(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. A função $p$ é trivialmente contínua em todo o plano, pois é uma função polinomial (Teorema 4.3.2) e a função $q$ é a composta da função $f_1(t) = \sqrt{t}$, que é uma função contínua em seu domínio ($Dom(f_1) = [0,\infty)$), com a função $g_1(x,y) = x^2+y^2$, que é também trivialmente contínua em todo o plano, pois é uma função polinomial (Teorema 4.3.2). Como $q$ não se anula em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, temos pelo Teorema 4.3.1b que $f$ é contínua para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, pois $f$ é o quociente de duas funções contínuas, onde a função do denominador não se anula. Vamos agora analisar se $f$ é contínua na origem. Como aparentemente $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ não parece se encaixar em nenhum dos teoremas vistos anteriormente (trata-se apenas de uma função limitada sozinha), vamos partir para tentar mostrar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ não existe. Para isto, vamos escolher dois caminhos diferentes de aproximação à origem e mostrar que ao longo destes caminhos os limites não são iguais. Considere portanto a curva $C_1$ parametrizada pela função $\gamma_1(t) = (t,0)$, $t \geq 0$ e a curva $C_2$ parametrizada pela função $\gamma_2(t) = (t,t)$, $t \leq 0$. Desta forma, calculando separadamente $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ao longo das curvas $C_1$ e $C_2$, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \textit{ao longo de } C_1}} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t} = \lim_{t\to 0^+} 1 = 1,$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \textit{ao longo de } C_2}} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_2(t)) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{\sqrt{t^2+t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{\sqrt{2t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{\sqrt{2}|t|} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{\sqrt{2}t} = \lim_{t\to 0^+} \sqrt{2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Desta forma, como os limites ao longo de dois caminhos diferentes são distintos, temos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ não existe. Portanto, $f$ não é contínua em $(0,0)$, uma vez que

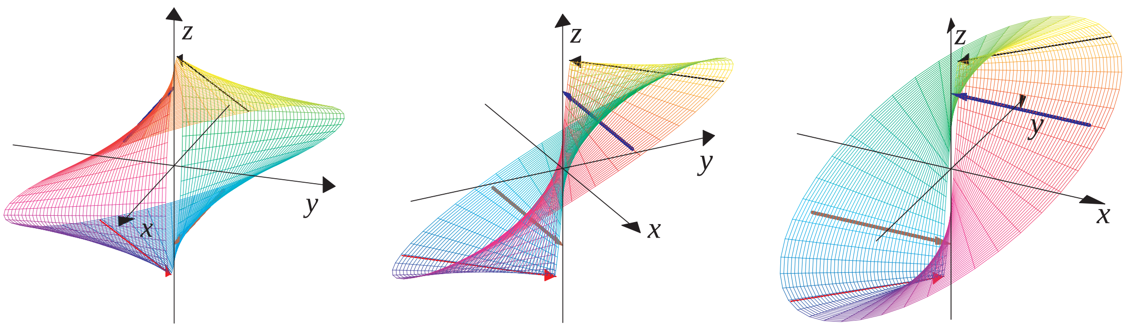
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \nexists.$$

Abaixo temos um esboço da gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ sob diferentes ângulos, para evidenciar os caminhos de aproximação $C_1$ e $C_2$. Além disto, vamos incluir dois novos caminhos de aproximação, ao longo das curvas $C_3$ e $C_4$, que são interessantes em matéria de visualização. Considere portanto a curva $C_3$ parametrizada pela função $\gamma_3(t) = (t,0)$, $t \leq 0$ e a curva $C_4$ parametrizada pela função $\gamma_2(t) = (t,t)$, $t \leq 0$. Desta forma, calculando separadamente $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ao longo das curvas $C_3$ e $C_4$, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_3}} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{t\to 0^-} f(\gamma_3(t)) = \lim_{t\to 0^-} \frac{t}{\sqrt{t^2}} = \lim_{t\to 0^-} \frac{t}{-t} = \lim_{t\to 0^-} -1 = -1,$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_4}} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{t\to 0^-} f(\gamma_4(t)) &= \lim_{t\to 0^-} \frac{2t}{\sqrt{t^2+t^2}} = \lim_{t\to 0^-} \frac{2t}{\sqrt{2t^2}} = \lim_{t\to 0^-} \frac{2t}{\sqrt{2}|t|} \\ &= \lim_{t\to 0^-} \frac{2t}{-\sqrt{2}t} = \lim_{t\to 0^-} -\sqrt{2} = -\sqrt{2}.\end{aligned}$$




♡

**Exemplo 4.3.11:** Considere a função

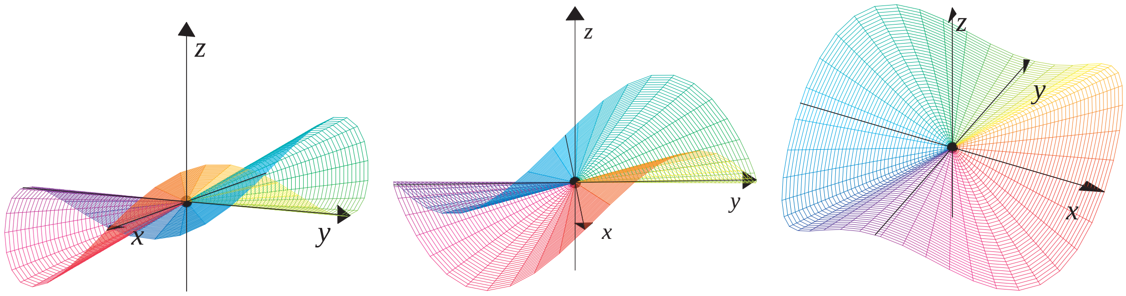
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Determine os pontos onde $f$ é contínua.

**Solução:** Observe que se $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, temos que $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, que é uma função racional, cujo denominador não se anula neste conjunto. Desta forma, pelo Teorema 4.3.3, temos que $f$ é contínua para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Vamos agora analisar se $f$ é contínua na origem. Observe que a função $g(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada, uma vez que $0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$. Além disso, a função $h(x,y) = y$ é tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$. Portanto, estamos diante do limite do produto de duas funções que satisfazem as condições do Teorema do Anulamento. Sendo assim, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

Concluímos assim que $f$ também é contínua na origem, sendo portanto contínua em todo $\mathbb{R}^2$.




$\heartsuit$

**Exemplo 4.3.12:** Considere a função

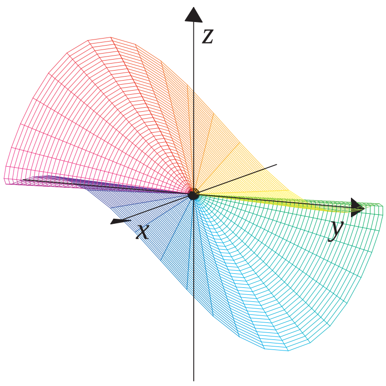
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

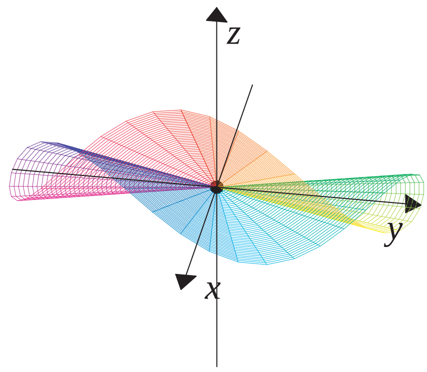
Determine os pontos onde $f$ é contínua.

**Solução:** Observe que se $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, temos que $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, que é uma função racional cujo denominador não se anula neste conjunto. Desta forma, pelo Teorema 4.3.3, temos que $f$ é contínua para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Vamos agora analisar se $f$ é contínua na origem. Observe que a função $g(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada, uma vez que $0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$. Além disso, a função $h(x,y) = x$ é tal que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$. Portanto, estamos diante do limite do produto de duas funções que satisfazem as condições do Teorema do Anulamento. Sendo assim, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

Concluímos assim que $f$ também é contínua na origem, sendo portanto contínua em todo $\mathbb{R}^2$. Abaixo temos um esboço do gráfico de $f$ sob diferentes ângulos.




♡

**Exemplo 4.3.13:** Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Determine os pontos onde $f$ é contínua.

**Solução:** Observe que se $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, temos que $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, que é uma função racional cujo denominador não se anula neste conjunto. Desta forma, pelo Teorema 4.3.3, temos que $f$ é contínua para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Vamos agora analisar se $f$ é contínua na origem. Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ não parece se encaixar em nenhum dos teoremas vistos anteriormente, vamos partir para tentar mostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ não existe. Para isto, vamos escolher dois caminhos de aproximação diferentes e mostrar que ao longo destes caminhos os limites não são iguais. Considere portanto a curva $C_1$ parametrizada pela função $\gamma_1(t) = (t,0)$, $t \geq 0$ e a curva $C_2$ parametrizada pela função $\gamma_2(t) = (t^2,t)$, $t \geq 0$ (inspirada nas curvas de nível estudadas no Exemplo 3.5.1f). Desta forma, calculando separadamente $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ ao longo das curvas $C_1$ e $C_2$, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \textit{ao longo de } C_1}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{0}{t^2} = \lim_{t\to 0^+} 0 = 0,$$

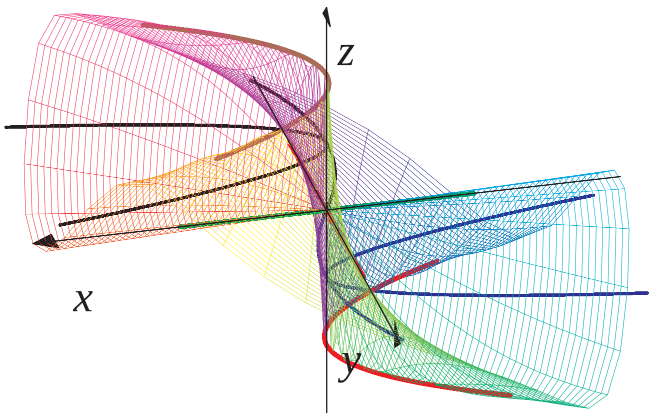
e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \textit{ao longo de } C_2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_2(t)) \quad = \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{t^4}{t^4+t^4} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^4}{2t^4} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Desta forma, como os limites ao longo de dois caminhos diferentes são distintos, temos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ não existe. Portanto, $f$ não é contínua em $(0,0)$, uma vez que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \nexists.$$

Concluimos assim que $f$ é contínua apenas em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Abaixo temos um esboço da gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ sob diferentes ângulos, para evidenciar os caminhos de aproximação $C_1$ e $C_2$.




♡

**Observação 4.3.1:** No exemplo acima (Exemplo 4.3.14) observe que ao longo de qualquer reta que contém a origem, temos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = 0$. De fato, considere $C_m$ a curva dadas na forma paramétrica por $\gamma_m(t) = (t, mt)$, $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{ao longo de } C_m}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{t\to 0} f(\gamma_m(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{m^2t^3}{t^2+m^4t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{m^2t}{1+m^2t^2} = 0.$$

Mais uma vez, esta observação sobre este exemplo reforça o fato de que não basta termos a informação de que ao longo de infinitos caminhos de aproximação do ponto $X_0$ o limite existe e vale $l$ para concluir que o limite da função, quando $X$ tende a $X_0$, existe e vale $l$. Basta que exista um único caminho de aproximação do ponto $X_0$, ao longo do qual o limite não existe ou não vale $l$, para que o limite da função quando $X$ tende a $X_0$ não exista.

## 4.4 Exercícios

**Exercício 4.4.1:** Determine se a função abaixo é contínua

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

**Solução:** Observe que se $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, temos que $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, que é o quociente das funções $p(x,y) = x^2$ e $q(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. A função $p$ é trivialmente contínua em todo o plano, pois é uma função polinomial (Teorema 4.3.2) e a função $q$ é a composta da função $f_1(t) = \sqrt{t}$, que é uma função contínua em seu domínio ($Dom(f_1) = [0, \infty)$), com a função $g_1(x, y) = x^2 + y^2$, que é também trivialmente contínua em todo o plano, pois é uma função polinomial (Teorema 4.3.2). Como $q$ não se anula em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, temos pelo Teorema 4.3.1b que $f$ é contínua para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, pois é o quociente de duas funções contínuas, onde a função do denominador não se anula. Vamos agora analisar se $f$ é contínua na origem. Observe que a função $g_2(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ é limitada, uma vez que

$$0 \leq \left| \frac{x}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = 1.$$

Além disso, a função $f_2(x, y) = x$ é tal que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x, y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$. Portanto, estamos diante do limite do produto de duas funções que satisfazem as condições do Teorema do Anulamento. Sendo assim, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad = \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \;.\; \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = f(0, 0).$$

Concluímos assim que $f$ também é contínua na origem, sendo portanto contínua em todo $\mathbb{R}^2$.